



5.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Εισαγωγή

Η αποδοχή των μιγαδικών αριθμών, εκτός από τις δυνατότητες που άνοιξε στην επίλυση των εξισώσεων, έδωσε μεγάλη ευελιξία στον αλγεβρικό λογισμό. Για παράδειγμα, η παράσταση $x^2 + y^2$ μπορεί τώρα να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $(x + yi)(x - yi)$. Οι μαθηματικοί εκμεταλλεύτηκαν αυτό το γεγονός σε πολλά ζητήματα, όπως είναι, για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των τόξων ενός κύκλου. Το 1739 ο A. de Moivre, συνδυάζοντας τον υπολογισμό των κυβικών ριζών παραστάσεων της μορφής $a + i\sqrt{\beta}$ (που εμφανίζονται στον τύπο επίλυσης της $x^3 = px + q$) με την τριγωνομετρική ταυτότητα $3\eta\mu\theta - 4\eta\mu^3\theta = \eta\mu 3\theta$, έδωσε τις πρώτες ιδέες για την τριγωνομετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Το 1748 ο L. Euler, ξεκινώντας από την ανάλυση της ισότητας $\cos^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ στη μορφή $(\cos\theta + i\eta\mu\theta)(\cos\theta - i\eta\mu\theta) = 1$, τόνισε τη σημασία των παραστάσεων της μορφής $\cos\theta + i\eta\mu\theta$ και έδειξε ότι $(\cos x + i\eta\mu x)(\cos y + i\eta\mu y) = \cos(x + y) + i\eta\mu(x + y)$. Γενικεύοντας έφτασε στη σχέση $(\cos z + i\eta\mu z)^n = \cos nz + i\eta\mu nz$

(που σήμερα φέρει το όνομα του de Moivre), από την οποία, με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, βρήκε τύπους για τα $\eta\mu nz$ και $\cos nz$.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις οι μιγαδικοί αντιμετωπίζονταν ως καθαρά συμβολικές παραστάσεις, που δεν απεικόνιζαν κάποια συγκεκριμένη πραγματικότητα. Η τριγωνομετρική παράσταση έδωσε όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (από τον C. Wessel το 1799 και τον R. Argand το 1806) για την αναλυτική έκφραση της διεύθυνσης στο επίπεδο, ακριβώς όπως οι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για τη διάκριση της φοράς στην ευθεία. Αυτές οι εξελίξεις διεύρυναν τις εφαρμογές των μιγαδικών και άνοιξαν το δρόμο για τη γεωμετρική ερμηνεία τους, την οποία καθιέρωσε ο C.F. Gauss το 1831.

Ορισμα Μιγαδικού

Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και \vec{OM} η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του.

Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού z καθεμιά από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM .

Από όλα τα ορίσματα του z ένα ακριβώς βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού z και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$. Είναι φανερό ότι:

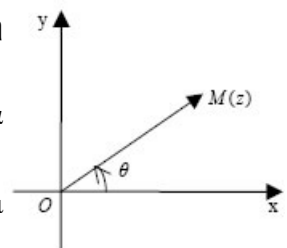
- Το $\text{Arg}(z)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x'x$.
- Δύο ορίσματα του z διαφέρουν κατά γωνία $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Για το μιγαδικό $z = 0$ δεν ορίζεται όρισμα. Γι'αυτό, στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι $z \neq 0$.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi \neq 0$, που έχει μέτρο $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και ένα όρισμά του είναι το θ . Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα έχουμε:

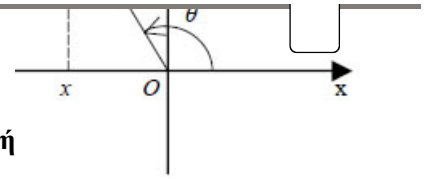
$$x = \rho \cos \theta$$





δηλαδή

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Ο τρόπος αυτός γραφής του μιγαδικού z λέγεται **τριγωνομετρική ή πολική μορφή του z** .

Για παράδειγμα, αν $z = -\sqrt{3} + i$, τότε το μέτρο του z είναι $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ και για κάθε όρισμά του θ ισχύουν:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, μια τιμή του ορίσματος είναι η $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα, έχουμε $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ή γενικότερα:

$$z = 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $\lambda > 0$ και $z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε η παράσταση $\lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z .

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

"Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π ".

Δηλαδή:

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών z_1 και z_2 , τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi, \kappa \in \mathbb{Z}).$$

Τριγωνομετρική Μορφή Γινόμενου Μιγαδικών

Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 , τότε για το γινόμενό τους έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Ομοίως, για το πηλίκο τους $\frac{z_1}{z_2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

 $z_2 \quad \rho_2$

Για παράδειγμα, αν $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, τότε

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) \right] = 6 \left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2} \right) = 6i$$

και

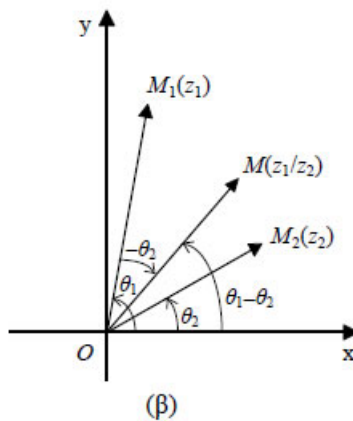
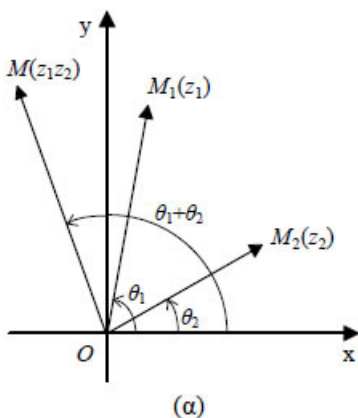
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) \right] = \frac{2}{3} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Από τις τριγωνομετρικές μορφές του γινομένου και του πηλίκου μιγαδικών προκύπτουν οι ιδιότητες

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{και} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

τις οποίες έχουμε συναντήσει και στην § 5.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 και μετά πολλαπλασιασμό της με ρ_2 (Σχ. α). Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z με το μιγαδικό $\cos\theta + i\sin\theta$ στρέφει μόνο τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία θ , αφού $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, αφού $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

- Η διαίρεση του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και μετά πολλαπλασιασμό της με $\frac{1}{\rho_2}$ (Σχ. β).

Θεώρημα του De Moivre

Αν $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή, σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta). \\ z^3 &= z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta). \end{aligned}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(n)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

• Για $n=1$ η ισότητα γίνεται $z^1 = \rho^1 [\cos(1\theta) + i\sin(1\theta)]$ ή ισοδύναμα $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, δηλαδή η $P(1)$ είναι αληθής.

• Θα αποδείξουμε ότι αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής, δηλαδή αν $z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$, τότε $z^{n+1} = \rho^{n+1} [\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]$.

..

Έχουμε
$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \cdot \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \rho^{n+1} [\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]. \end{aligned}$$

Άρα η $P(n)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακραίους n .

Για παράδειγμα, αν $z = \sqrt{3} + i$, επειδή $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} z^{1998} &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{1998} = 2^{1998} \left(\cos\frac{1998\pi}{6} + i\sin\frac{1998\pi}{6}\right) \\ &= 2^{1998} (\cos 333\pi + i\sin 333\pi) = 2^{1998} (\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{1998}. \end{aligned}$$

Το προηγούμενο θεώρημα αποδίδεται στο μαθηματικό **De Moivre** και γι'αυτό φέρει το όνομά του.

Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} &= \frac{1}{\rho^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n} \\ &= \frac{1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)}{\rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))} \\ &= \rho^{-n} [\cos(0 - n\theta) + i\sin(0 - n\theta)] \\ &= \rho^{-n} [\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]. \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z , αν $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$

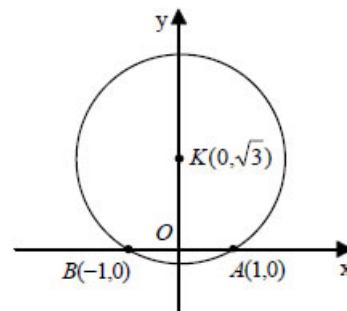
ΛΥΣΗ



$$\frac{z-1}{z+1} = A + Bi, \text{ όπου } A = \frac{x+y-1}{(x+1)^2+y^2} \text{ και } B = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Επομένως, η συνθήκη $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$ είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \frac{B}{A} = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y > 0 \end{cases} \\ B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2^2 \\ y > 0 \end{cases}$$



Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι το τόξο του κύκλου κέντρου $K(0, \sqrt{3})$ και ακτίνας $\rho=2$ που είναι πάνω από τον άξονα x' .

2. Αν $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$, να αποδειχτεί ότι

α) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$

β) $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$.

ΛΥΣΗ

Έστω οι μιγαδικοί $a = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha$, $b = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$, $c = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$. Έχουμε

$$a + b + c = (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma) + i(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma) = 0 + 0i = 0$$

και επομένως $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Με αντικατάσταση των a, b και c έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)^3 + (\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)^3 + (\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma)^3 &= \\ &= 3(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + i\eta\mu 3\alpha) + (\sigma\upsilon\nu 3\beta + i\eta\mu 3\beta) + (\sigma\upsilon\nu 3\gamma + i\eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3[\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma) + i(\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) \text{ και}$$

$$\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ



2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $4(\sin 15^\circ + i\eta\mu 15^\circ) \cdot 6(\sin 30^\circ + i\eta\mu 30^\circ)$

β) $5\left(\sin \frac{\pi}{8} + i\eta\mu \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\left(\sin \frac{3\pi}{8} + i\eta\mu \frac{3\pi}{8}\right)$

γ) $\left(\sin \frac{2\pi}{10} + i\eta\mu \frac{2\pi}{10}\right) \cdot \left(\sin \frac{3\pi}{10} + i\eta\mu \frac{3\pi}{10}\right)$

3. Να κάνετε τις πράξεις

α) $\frac{25(\sin 160^\circ + i\eta\mu 160^\circ)}{5(\sin 100^\circ + i\eta\mu 100^\circ)}$ β) $\frac{6\left(\sin \frac{5\pi}{6} + i\eta\mu \frac{5\pi}{6}\right)}{\sin \frac{\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi}{3}}$

γ) $\frac{7(\sin 130^\circ + i\eta\mu 130^\circ)}{14(\sin(-20^\circ) + i\eta\mu(-20^\circ))}$

4. Να βρείτε τις δυνάμεις

α) $[2(\sin 20^\circ + i\eta\mu 20^\circ)]^3$ β) $\left[3\left(\sin \frac{5\pi}{4} + i\eta\mu \frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ) $\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16}$

5. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$

6. Αν $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τον z^{2000} .

7. Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$, να υπολογίσετε την παράσταση $z_1^n + z_2^n$, όπου n θετικός ακέραιος.

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i .

9. Αν $z = 1 + i\sqrt{3}$ και $w = 1 + i$, να δείξετε ότι $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{12}$ και να βρείτε το $\eta\mu \frac{\pi}{12}$ και το $\sin \frac{\pi}{12}$.

10. Να βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού $z \neq 0$ αν $z^2 = \bar{z}$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ



β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{100}$.

2. α) Να δείξετε ότι αν $(1+i)^v = (1-i)^v$, όπου $v \in \mathbf{N}^*$ τότε $v=4\kappa$, $\kappa \in \mathbf{N}$
 β) Αν $f(v) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^v + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^v$, να δείξετε ότι $f(v+4) + f(v) = 0$.
3. Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, αν και μόνο αν $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$.
4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:
 α) $\text{Arg}(z-i) = \frac{\pi}{6}$ β) $\text{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{4}$ γ) $\text{Arg}\left(\frac{z}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$.
5. Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z+2-5i| \leq 2$, να βρείτε εκείνον που έχει:
 α) Το μικρότερο πρωτεύον όρισμα β) Το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.
6. Αν $z = \cos\theta + i\eta\mu\theta$, να αποδείξετε ότι:
 α) $z^v + \frac{1}{z^v} = 2\cos(v\theta)$ β) $z^v - \frac{1}{z^v} = 2i\eta\mu(v\theta)$.
7. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z|=1$ και $w = (\sqrt{3}-i)z$, τότε:
 α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w .
 β) Να βρείτε την εικόνα εκείνου του μιγαδικού από τους w , για τον οποίο ισχύει $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$.
8. Αν $z = \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + i\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ .
9. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;